16. Tétel

Determinánssal töcskölés

Mátrix transzponáltja, transzponált determinánsa, ESÁ hatása a determinánsra, determinánsszámítás felső háromszögmátrixra transzformálással, előjeles aldetermináns, kifejtési tétel.

**Def transzponált**: Az A ∈ Rn×k mátrix transzponáltja az az A> ∈ R k×n mátrix, amelyben az i-dik sor j-dik eleme az A mátrix j-dik sorának i-dik eleme ∀i, j.

**Tétel: Ha A négyzetes mátrix, akkor |A| = |AT|.**

Biz: Az A mátrix bármely bástyaelhelyezését meghatározó elemek AT- ban is bástyaelhelyezést alkotnak. Két bástya pontosan akkor alkot ÉK-DNy párt A-ban, ha AT-ban is ÉK-DNy-i párt alkotnak. Ezért det(A)-ban ugyanazokat a szorzatokat kell összeadni ugyazzal az előjellel, mint det(AT)- ban.

Állítás: Ha A = (u1 , u2 , . . . , un ) ∈ R n×n és u 0 i ∈ R n , akkor

1. |u1 , . . . , ui+ui , . . . , un | = |u1 , . . . , ui , . . . , un |+|u1 , . . . , u’ i , . . . , un |, azaz ha az i edik oszlop felbomlik két vektor összegére, akkor a determináns annak a két determinánsnak az összege, amelyikekben az i-edik oszlopot az egyes vektorokkal helyettesítjük.

BIZ: A bal oldali determináns minden kifejtési tagjában az i-dik oszlopbeli tényező a ui és u 0 i egy koordinátaösszege. Ha felbontjuk a zárójelet, a kifejtési tagból két szorzat lesz. Ezek a szorzatok pedig épp a jobb oldali determinánsok kifejtési tagjai.

(2): |u1 , . . . , λui , . . . , un | = λ|u1 , . . . , ui , . . . , un | ∀λ ∈ R: az i-edik oszlopot λ-val végigszorozva a determináns is λ-szoros lesz.

BIZ: no brainer

(3): ui = 0 ⇒ |A| = 0, azaz ha az i-edik oszlopban csak 0-k állnak, akkor a determináns is 0.

BIZ: no brainer ez is (minden szorzatban lesz 0)

(4): |u1 , . . . , ui , . . . , uj , . . . , un | = −|u1 , . . . , uj , . . . , ui , . . . , un |. Az i-edik és jedik oszlop cseréjekor a determináns előjelet vált.

BIZ: permutációban inverziójuk változik, tehát az előjel is.

(5) Ha A-nak van két egyforma oszlopa, akkor |A| = 0.

BIZ: A két egyforma oszlopot felcserélve a mátrix nem változik, így a determimáns sem. (4) miatt viszont a determináns (−1)-szeres lesz, azaz |A| = −|A|, ahonnan |A| = 0 adódik.

Okosabb bizonyítás: felső háromszög mátrixra alaktás közben belefutunk egy csupanulla sorba, ami megkönnyíti majd a számolásunkat (akármi\*0=0)

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:

(1) Sort λ-val szorozva a determináns λ-szorosra változik.

(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.

(3) A j-dik sort kicserélve az i-dik és j-dik sor összegére a determináns nem változik.

BIZ:

(1): Az előző állítás (2) részét alkalmazzuk az A> transzponáltra.

(2): Az előző állítás (4) részét alkalmazzuk az A> transzponáltra.

(3): Az előző állítás (1) részét alkalmazva a transzponáltra a lecserélt sorú determináns megkapható |A|+|A0 | összegként, ahol A0 -nek két egyforma sora van. A korábban látottak és az előző állítás (3) része miatt |A0 | = |(A0 ) >| = 0.

**Def főátló:** Az A négyzetes mátrix főátlója az A mindazon elemei, amelyek sor- és oszlopindexe megegyezik

**Def felsőháromszög mátrix:** Ha A főátlója alatt csak 0-k állnak, akkor A felső háromszögmátrix

**Felsőháromszög mátrixra alakítással determináns kiszámolása:**

A mátrixot lépcsős alakra hozzuk ESÁ-k alkalmazásával, az előbb bebizonyított állítások szerint.

2 eset lesz: 1, lett felsőháromszögmátrix, főátlót összeszorozzuk, van determináns

2, lett csupanullasor, tehát a determináns nulla

**Def előjeles aldetermináns:** Az A mátrix i-dik sorának j-dik eleméhez tartozó Ai,j előjeles aldeterminánsa az i-dik sor és j-dik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsának (−1)i+j -szerese.

**Kifejtési tétel:**

A mátrix determinánsának soronkénti és oszloponkénti kiszámítására használjuk. Kiválasztjuk a mátrix egy sorát ami szerint ki szeretnénk fejteni a determinánsát a mátrixnak. Majd az oszlop összes „koordinátája” szerint beszorozzuk a különböző aldeterminánsokat a különböző koordinátákkal, és megfelelő előjellel, amit a sakktábla szabály ad meg. Az aldeterminánsokat úgy kapjuk, hogy a sorát és az oszlopát „töröljük” a koordinátának, és „összecsukjuk a mátrixot”. Ezt az oszlop összes sorával meg kell csinálni.

Röviden: kiválasztasz egy számot a mátrixból, sakktáblával megnézed mi a helyes előjele, azt kiteszed elé, kiveszed a számot, majd a mátrixot összecsukod. Ezt az oszlop összes sorával megcsinálod.